SÉRIE I : DÉRIVÉES ET INTÉGRALES

Exo 1 :

i) $$f(x) = \left[\cos(x^{1/3}) + \tan \ln(1+x^2) \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = -\left\{ -\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \sin\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{2x}{1+x^2}\left[1 + \tan^2 \ln(1+x^2)\right] \right\}$$

$$\times \left[\cos\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \tan \ln(1+x^2) \right]^{-2}$$

ii) $$f(x) = \operatorname{Argsh} \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}$$

iii) $$f(x) = \ln \ln \ln \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \, \frac{1}{\ln x} \, \frac{1}{\ln \ln x} \, \frac{1}{\ln \ln \ln x}$$

iv) $$f(x) = \frac{\cos^3 x - 1}{\ln \sin x + x^3 - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{-3 \sin x \cos^2 x \left(\ln \sin x + x^3 - 2\right) + \left(1 - \cos^3 x\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x} + 3x^2\right)}{\left(\ln \sin x + x^3 - 2\right)^2}$$

v) $f(x) = x^{\sin x} = \left(e^{\ln x}\right)^{\sin x} = e^{\ln(x)\sin(x)}$, $x > 0$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x\right) x^{\sin x}$$

vi) $g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} dt\, f(t, x)$

↳ ici la fonction $g(x)$ est définie comme l'intégrale d'une fonction f à deux variables. On doit ici utiliser la dérivabilité sous le signe intégrale ("Leibniz integral rule" en anglais) et on a

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{a(x)}^{b(x)} dt\, f(t,x)\right] = f(b(x), x)\frac{db}{dx} - f(a(x), x)\frac{da}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} dt\, \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dx} = f(\sin x, x)\cos x + f(\cos x, x)\sin x + \int_{\cos x}^{\sin x} dt\, \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$$

Exo 2 : l'objectif de cet exercice est de démontrer les formes logarithmiques des fonctions hyperboliques réciproques.

2/1

1) Soit

$$g(x) = f(x) - \ln\left| x + \sqrt{x^2-1} \right|$$

où la fonction f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Argch} x & , \quad x > 1 \\ -\operatorname{Argch}(-x) & , \quad x < -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ on doit donc distinguer les deux cas $x > 1$ et $x < -1$

$\boxed{\text{Cas } x > 1}$ On a dans ce cas

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} > 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2-1} > 1 > 0$$

et donc

$$\left| x + \sqrt{x^2-1} \right| = x + \sqrt{x^2-1} \quad , \quad \forall x > 1$$

la fonction g est donc donnée par

$$g(x) = \operatorname{Argch} x - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1} \right) \quad , \quad \forall x > 1$$

On dérive maintenant g et on trouve

$$\frac{dg}{dx} = 0 \quad , \quad \forall x > 1$$

ce qui implique donc directement que g est constante,

$$g(x) = \text{cste} \quad , \quad \forall x > 1$$

Or, les fonctions $\text{Argch}\, x$ et $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ sont définies en $x = 1$, et on a

$$g(1) = \text{Argch}(1) - \ln(1) = 0$$

ce qui implique donc

$$g(x) = g(1) = 0 \quad , \quad \forall x > 1$$

On a donc démontré la forme logarithmique

$$\boxed{\text{Argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})} \quad , \quad \forall x \geq 1$$

de la fonction $\text{Argch}(x)$.

$\boxed{\text{Cas } x < -1}$ On a dans ce cas

$$x^2 > 1 \Rightarrow x^2 > x^2 - 1 > 0 \Rightarrow |x| > \sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow -|x| + \sqrt{x^2-1} < 0$$

Or pour $x < -1$, on a en particulier $x = -|x|$, d'où

$$x + \sqrt{x^2-1} < 0$$

et donc

$$|x + \sqrt{x^2-1}| = -x - \sqrt{x^2-1} \quad , \quad \forall x < -1$$

La fonction g est donc ici donnée par

$$g(x) = -\text{Argch}(-x) - \ln(-x - \sqrt{x^2-1}) \quad , \quad \forall x < -1$$

On dérive g et on trouve

$$\frac{dg}{dx} = 0 \quad , \quad \forall x < -1$$

et donc à nouveau

$$g(x) = \text{cste} \quad , \quad \forall x < -1$$

Ici encore, les fonctions $\text{Argch}(-x)$ et $\ln(-x - \sqrt{x^2-1})$ sont définies en $x = -1$, et on a

$$g(-1) = -\text{Argch}(1) - \ln(1) = 0$$

d'où

$$g(x) = g(-1) = 0 \quad , \quad \forall x < -1$$

On a donc démontré dans ce cas que

$$\text{Argch}(-x) = -\ln(-x - \sqrt{x^2-1}) \quad , \quad \forall x \leq 1$$

2) Soit maintenant

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

où la fonction f est ici définie par

$$f(x) = \begin{cases} \text{Argth}\, x & , \quad -1 < x < 1 \\ \text{Argth}\, \dfrac{1}{x} & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ on doit donc à présent distinguer les deux cas $-1 < x < 1$ et $|x| > 1$

$\boxed{\text{Cas } -1 < x < 1}$ On a dans ce cas

$$-1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < 1+x < 2$$

et

$$1 > -x > -1 \quad \Rightarrow \quad 2 > 1-x > 0$$

d'où

$$\frac{1+x}{1-x} > 0$$

et donc

$$\left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{1+x}{1-x} \quad , \quad \forall x \in]-1, 1[$$

La fonction g est donc donnée par

$$g(x) = \text{Argth}\, x - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad \forall x \in]-1, 1[$$

On dérive g et on trouve

$$\frac{dg}{dx} = 0 \quad , \quad \forall x \in]-1, 1[$$

ce qui implique

$$g(x) = \text{cste} \quad , \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Puisque $0 \in]-1, 1[$ et que

$$g(0) = \text{Argth}(0) - \frac{1}{2} \ln(1) = 0$$

on obtient donc

$$g(x) = g(0) = 0 \quad , \quad \forall x \in]-1, 1[$$

On a donc démontré la forme logarithmique

$$\boxed{\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \quad , \quad \forall x \in]-1,1[$$

2_3

de la fonction $\operatorname{Argth} x$.

$\boxed{\text{Cas } |x|>1}$ Si $x>1$ on a

$$1+x>0 \quad \text{et} \quad 1-x<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+x}{1-x}<0 \quad , \quad \forall x>1$$

et de plus, si $x<-1$, on a

$$1+x<0 \quad \text{et} \quad 1-x>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+x}{1-x}<0 \quad , \quad \forall x<-1$$

soit donc

$$\frac{1+x}{1-x}<0 \quad , \quad \forall |x|>1$$

d'où

$$\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{1+x}{x-1} \quad , \quad \forall |x|>1$$

la fonction g est donc ici donnée par

$$g(x) = \operatorname{Argth} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \quad , \quad \forall |x|>1$$

On dérive à nouveau g et on trouve

$$\frac{dg}{dx} = 0 \quad , \quad \forall |x|>1$$

ce qui implique ici encore

$$g(x) = \text{cste} \quad , \quad \forall |x|>1$$

Prenons maintenant la limite lorsque $x \to \infty$, on a

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{Argth} \frac{1}{x} = \operatorname{Argth}(0) = 0$$

et

$$\lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

soit donc

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

On a donc

$$g(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \quad , \quad \forall |x| > 1$$

ce qui montre donc que

$$\operatorname{Argth} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

<u>NB</u> : on démontre de la même manière la forme logarithmique

$$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

de la fonction Argsh x.

Exo 3 : on donne ici quelques primitives $F(x)$ de fonctions $f(x)$ usuelles, ie

3
1

$$F(x) = \int^x dx' \, f(x')$$

Il faut faire attention aux domaines de définition des fonctions $f(x)$, ie aux domaines de dérivabilité des fonctions $F(x)$

i) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

↳ $\alpha = -1$: $F(x) = \ln|x| + C$

↳ $\alpha \neq -1$: $F(x) = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$

ii) $f(x) = e^x$ $\Rightarrow$ $F(x) = e^x + C$

iii) $f(x) = \cos x$ $\Rightarrow$ $F(x) = \sin x + C$

iv) $f(x) = \sin x$ $\Rightarrow$ $F(x) = -\cos x + C$

v) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, ici il faut être attentif au fait que la fonction $\tan x$ n'est pas définie pour les valeurs de x telles que $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $F(x) = \tan x + C$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$

vi) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow$ $F(x) = \text{Arcsin}\, x + C$, $x \in \left]-1, 1\right[$

vii) $f(x) = \text{ch}\, x$ $\Rightarrow$ $F(x) = \text{sh}\, x + C$

viii) $f(x) = \operatorname{sh} x \Rightarrow F(x) = \operatorname{ch} x + C$

ix) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \Rightarrow F(x) = \operatorname{th} x + C$

x) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow F(x) = \operatorname{Argsh} x + C$

xi) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow F(x) = \operatorname{Argch} x + C \quad , \quad x \in \,]1, \infty[$

xii) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} \Rightarrow F(x) = \operatorname{Argth} x + C \quad , \quad x \in \,]-1, 1[$

Exo 4 : on souhaite ici calculer des primitives $F(x)$ de fonctions $f(x)$, ie

4.1

$$F(x) = \int^x dt\, f(t)$$

par la méthode du changement de variables (CV).

i) $f(x) = x^2\sqrt{x^2-1}$ $\Rightarrow$ $F(x) = \int^x dt\, t^2\sqrt{t^2-1}$

→ CV : $t = \text{ch}\, u$ $\Rightarrow$ $u = \text{Argch}\, t = \ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)$

$dt = du\, \text{sh}\, u$

On obtient donc pour $F(x)$, avec l'identité $\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1$,

$$F(x) = \int^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})} du\, \text{sh}^2 u\, \text{ch}^2 u = \frac{1}{16}\int^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})} du\, \left(e^u - e^{-u}\right)^2\left(e^u + e^{-u}\right)^2$$

→ CV : $v = e^u$ $\Rightarrow$ $u = \ln v$; $du = \frac{dv}{v}$

On obtient alors pour $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{16}\int^{x+\sqrt{x^2-1}} dv \left(v^3 + \frac{1}{v^5} - \frac{2}{v}\right)$$

et donc

$$F(x) = \frac{1}{16}\left\{\frac{1}{4}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4 - \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4}\right] - 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right\}$$

On peut ensuite simplifier cette expression et montrer que

$$F(x) = \frac{1}{8}\left[x\sqrt{x^2-1}\,\left(2x^2-1\right) - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]$$

ii) $f(x) = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow F(x) = \int^x \frac{dt}{\sin t} = \int^x dt\, \frac{\sin t}{1-\cos^2 t}$

$\rightarrow$ CV : $u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t\, dt$

On obtient donc pour $F(x)$

$$F(x) = -\int^{\cos x} \frac{du}{1-u^2} = -\operatorname{Argth} \cos x = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)$$

iii) $f(x) = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow F(x) = \int^x \frac{dt}{\cos t} = \int^x dt\, \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}$

$\rightarrow$ CV : $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t\, dt$

On obtient donc pour $F(x)$

$$F(x) = \int^{\sin x} \frac{du}{1-u^2} = \operatorname{Argth} \sin x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$$

iv) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \Rightarrow F(x) = \int^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2\int^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}}$

$\rightarrow$ CV : $u = e^t \Rightarrow t = \ln u \;;\; dt = \frac{du}{u}$

On obtient donc pour $F(x)$

$$F(x) = 2\int^{e^x} \frac{du}{1+u^2} = 2 \operatorname{Arctan}(e^x)$$

v) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x} \Rightarrow F(x) = \int^x \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = 2\int^x \frac{dt}{e^t - e^{-t}}$

On obtient donc, à nouveau avec le CV $u = e^t$

$$F(x) = 2\int^{e^x} \frac{du}{u^2-1} = -2\int^{e^x} \frac{du}{1-u^2} = -2 \operatorname{Argth} e^x = -\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$$

Exo 5 : on souhaite ici démontrer quelques propriétés des intégrales de Wallis

(5₁)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} dx \sin^n x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\pi/2} dx \cos^n x \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

1) Notons tout d'abord que I_n peut s'écrire sous la forme

$$I_n = \int_0^{\pi/2} dx \sin x \sin^{n-1} x$$

On effectue maintenant une intégration par parties (IPP) et on a

$$I_n = -\Big[\cos x \sin^{n-1} x\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} dx \cos^2 x \sin^{n-2} x$$

soit, puisque $\cos\frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} dx\, (1 - \sin^2 x)\sin^{n-2} x$$

et donc, par définition de I_n,

$$I_n = (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n$$

On en tire immédiatement la relation de récurrence

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \tag{1}$$

2) Utilisons maintenant le résultat (1) afin de déterminer une formule explicite de I_n. Pour ce faire, on distinguera les cas où n est pair et impair.

$\boxed{\text{Cas } n \text{ pair}}$ prenons donc n de la forme

$$n = 2k \quad , \quad k \geq 1$$

Démontrons maintenant l'hypothèse de récurrence H_k,

$$H_k : \qquad I_{2k} = \left[\frac{\prod_{j=1}^{k} (2j-1)}{\prod_{j=1}^{k} (2j)} \right] I_0 \quad , \quad \forall k \geq 1 \qquad (2)$$

__preuve__ : → on initialise la récurrence, on a d'après la question 1) ci-dessus

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\prod_{j=1}^{1} (2j-1)}{\prod_{j=1}^{1} (2j)} I_0$$

ce qui montre bien que H_1 est vraie.

→ Supposons maintenant que H_k soit vraie pour un certain entier $k \geq 1$. Par la question 1) on a

$$I_{2(k+1)} = \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} I_{2k}$$

et donc, puisque l'on suppose H_k vraie,

$$I_{2(k+1)} = \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} \frac{\prod_{j=1}^{k} (2j-1)}{\prod_{j=1}^{k} (2j)} I_0 = \frac{\prod_{j=1}^{k+1} (2j-1)}{\prod_{j=1}^{k+1} (2j)} I_0$$

ce qui montre bien que H_{k+1} est également vraie

⇒ H_k est donc vraie pour tout entier $k \geq 1$ ▨

Notons de plus que

$$\prod_{j=1}^{k} (2j) = 2^k \prod_{j=1}^{k} j = 2^k \, k! \qquad (3)$$

J_2

et

$$\prod_{j=1}^{k} (2j-1) = \left[\prod_{j=1}^{k} (2j-1)\right]\left[\frac{\prod_{j=1}^{k} (2j)}{\prod_{j=1}^{k} (2j)}\right] = \frac{(2k)!}{2^k \, k!} \qquad (4)$$

On a également, par définition de I_m,

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx \, \sin^0(x) = \frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

En combinant (2) avec les résultats (3)-(5), on obtient donc

$$\boxed{I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k+1} (k!)^2} \, \pi} \quad , \quad \forall k \geq 0 \qquad (6)$$

$\boxed{\text{Cas } n \text{ impair}}$ prenons maintenant n de la forme

$$n = 2k+1 \quad , \quad k \geq 1$$

De la même manière que pour le cas pair, on démontre par récurrence que

$$I_{2k+1} = \left[\prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1}\right] I_1 \quad , \quad \forall k \geq 1$$

Puisque par définition de I_m on a

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} dx \, \sin x = -\left[\cos x\right]_0^{\pi/2} = 1$$

on obtient donc

$$\boxed{I_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}} \quad , \quad \forall k \geq 0 \qquad (7)$$

3) Montrons tout d'abord que la suite $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Pour ce faire, étudions le signe de la différence $I_{n+1} - I_n$. Par définition de I_n, on a

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} dx \sin^{n+1} x - \int_0^{\pi/2} dx \sin^n x$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx \,(\sin x - 1) \sin^n x$$

Or, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$0 \leq \sin x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \sin x - 1 \leq 0$$

soit donc

$$(\sin x - 1)\sin^n x \leq 0 \quad , \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

On a donc

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

soit

$$I_{n+1} \leq I_n \quad , \quad \forall n \geq 0 \qquad (8)$$

ce qui montre bien que la suite $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
On peut donc en particulier écrire, avec (8),

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

d'où, en divisant par I_n (ce qui ne change pas le sens de l'inégalité, puisqu'il est clair que $I_n > 0$ compte tenu du fait que $\sin^n x > 0$, $\forall x \in]0, \pi/2[$)

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$ (J_3)

On peut maintenant exprimer le rapport I_{n+2}/I_n à l'aide du résultat de la question 1), et on obtient

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

On prend maintenant la limite $n \to \infty$, et on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

On peut dès lors conclure, à l'aide du théorème des gendarmes, que l'on a la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \tag{9}$$

4) D'après (9), on peut en particulier écrire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1 \tag{10}$$

Or, en utilisant les résultats (6) et (7), on a

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \frac{2}{(2n+1)\pi} \tag{11}$$

En combinant (10) et (11), on tire

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 \frac{2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}\right]^2 = \pi$$

d'où, par la propriété de la limite de la composée (ie ici en prenant la racine)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} = \sqrt{\pi} \tag{12}$$

5) Notons tout d'abord que

$$I_n^2 = I_n I_{n-1} \frac{I_n}{I_{n-1}} \tag{13}$$

Il est ensuite facile de montrer, en distinguant les cas n pair et impair et en utilisant les résultats (6)-(7), que

$$I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n} \tag{14}$$

On tire donc de (13) et (14) l'identité

$$\frac{2n I_n^2}{\pi} = \frac{I_n}{I_{n-1}}$$

d'où, en prenant la limite $n\to\infty$ et en utilisant (9)

$$\lim_{n\to\infty} n I_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

soit, encore une fois en prenant la racine,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Cela démontre le comportement asymptotique de I_n,

$$I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Exo 6 : soit $F_{n,k}(x)$ la primitive de $1/(x^k+1)^n$ qui s'annule en 0, ie telle que $F_{n,k}(0) = 0$. On a donc par construction

6_1

$$F_{n,k}(x) = \int_0^x dy \, \frac{1}{(y^k+1)^n} \qquad (1)$$

Clairement, pour $n = 0$ cette intégrale est triviale, puisque dans ce cas $F_{0,k}(x) = \int_0^x dy = x$, $\forall k$. On suppose donc dorénavant que $n > 0$, et de même $k > 0$.

Notons tout d'abord que (1) peut se réécrire sous la forme

$$F_{n,k}(x) = \int_0^x dy \, \frac{y^k+1}{(y^k+1)^{n+1}}$$

$$= \int_0^x dy \, y \, \frac{y^{k-1}}{(y^k+1)^{n+1}} + \int_0^x \frac{dy}{(y^k+1)^{n+1}}$$

où l'on peut voir que le second terme dans le membre de droite n'est rien d'autre que $F_{n+1,k}(x)$, et on peut donc écrire

$$F_{n,k}(x) = -\frac{1}{nk} \int_0^x dy \, y \, \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{(y^k+1)^n}\right] + F_{n+1,k}(x)$$

On effectue maintenant une intégration par parties, ce qui nous permet d'obtenir la relation de récurrence

$$\boxed{F_{n+1,k}(x) = \frac{nk-1}{nk} F_{n,k}(x) + \frac{1}{nk} \frac{x}{(x^k+1)^n}} \qquad (2)$$

On souhaite maintenant utiliser ce résultat pour calculer

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(y^3+1)^3} = \lim_{x\to\infty} F_{3,3}(x) \qquad (3)$$

La première étape est donc de calculer $F_{3,3}(x)$. On utilise tout d'abord pour obtenir $F_{3,3}(x)$ en fonction de $F_{1,3}(x)$, et on obtient

$$F_{3,3}(x) = \frac{5}{9} F_{1,3}(x) + \frac{5}{18} \frac{x}{x^3+1} + \frac{1}{6} \frac{x}{(x^3+1)^2} \qquad (4)$$

On doit à présent calculer $F_{1,3}(x)$, qui est par définition donnée par

$$F_{1,3}(x) = \int_0^x dy \, \frac{1}{y^3+1} \qquad (5)$$

Notons que

$$y^3+1 = (y+1)(y^2-y+1)$$

On décompose donc l'intégrand dans (5) en éléments simples de la forme

$$\frac{1}{y^3+1} = \frac{A}{y+1} + \frac{By+C}{y^2-y+1}$$

et on trouve

$$\frac{1}{y^3+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{y+1} - \frac{1}{6}\,\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2-y+1} \qquad (6)$$

6_2

les deux premiers termes du membre de droite de (6) s'intègrent facilement, et on obtient des logarithmes. En combinant (5) et (6), on obtient donc pour $F_{1,3}(x)$

$$F_{1,3}(x) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dy}{y^2-y+1} \qquad (7)$$

La dernière intégrale dans (7) peut se calculer en complétant le carré, ie en écrivant

$$y^2 - y + 1 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

puis en effectuant le changement de variable

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(y - \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad dy = \sqrt{\frac{3}{4}}\,dv$$

ce qui donne

$$\int_0^x \frac{dy}{y^2-y+1} = \sqrt{\frac{4}{3}}\int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}(x-\frac{1}{2})} \frac{dv}{v^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\mathrm{Arctan}\left[\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] - \mathrm{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} \qquad (8)$$

On substitue maintenant (8) dans (7), et on obtient pour $F_{1,3}(x)$ (en utilisant le fait que Arctan est impaire)

$$F_{1,3}(x) = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| \qquad (9)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \mathrm{Arctan}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

On combine maintenant (4) et (9), ce qui donne pour $F_{3,3}(x)$

$$F_{3,3}(x) = \frac{5}{18} \frac{x}{x^3+1} + \frac{1}{6} \frac{x}{(x^3+1)^2} \qquad (10)$$

$$+ \frac{5}{9} \left\{ \ln\left[\frac{(x+1)^{1/3}}{(x^2 - x + 1)^{1/6}} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\}$$

où l'on a supposé que $x > -1$, ce qui est cohérent avec la limite $x \to \infty$ que l'on fait maintenant.

En effet, on prend maintenant la limite $x \to \infty$ dans (10), et, en se rappelant que $\lim_{x \to \infty} \mathrm{Arctan}\, x = \pi/2$, on obtient donc

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dy}{(y^3+1)^3} = \lim_{x \to \infty} F_{3,3}(x) = \frac{5}{9\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{2} + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]}$$

Exo 7 : soit $R(x)$ une fraction rationnelle, ie une fonction de la forme

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, supposés premiers entre eux rendant ainsi la fraction $R(x)$ irréductible. On rappelle que deux polynômes sont premiers entre eux lorsque les seuls polynômes qui les divisent sont les polynômes constants non nuls.

Supposons maintenant que l'on soit capable de déterminer les racines du polynôme Q, que l'on peut alors factoriser sous la forme

$$(1) \qquad Q(x) = \left[\prod_{j=1}^{k} (x - \rho_j)^{n_j} \right] \left[\prod_{j=1}^{\ell} \left(a_j x^2 + b_j x + c_j \right)^{m_j} \right]$$

où ρ_j, $j = 1, \dots, k$, sont les racines réelles de Q de multiplicité n_j, et les trinômes $a_j x^2 + b_j x + c_j$, $j = 1, \dots, \ell$, correspondent aux racines complexes de Q de multiplicité m_j. Notons donc que le trinôme $a_j x^2 + b_j x + c_j$ a un discriminant strictement négatif, ie $\Delta_j = b_j^2 - 4 a_j c_j < 0$.

NB : il est clair que la factorisation (1) du polynôme Q peut ne pas être obtenue si $\deg Q \geq 5$ (deg désignant le degré)

Néanmoins, si l'on suppose la factorisation (1) connue, alors on peut écrire la fraction rationnelle $R(x)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des éléments simples suivants :

i) x^j, avec $j = 0, \dots, \deg(P) - \deg(Q)$

lorsque $\deg(P) \geq \deg(Q)$;

ii) $\dfrac{1}{(x - \rho_i)^j}$, avec $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, n_i$;

iii) $\dfrac{\alpha_i x + \beta_i}{(a_i x^2 + b_i x + c_i)^j}$, avec $i = 1, \dots, \ell$

et $j = 1, \dots, m_i$.

Ainsi, la fraction rationnelle $R(x)$ peut s'écrire

$$R(x) = \sum_{j=1}^{\deg(P)-\deg(Q)} A_j x^j + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{B_j^{(i)}}{(x - \rho_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_j^{(i)} x + \beta_j^{(i)}}{(a_i x^2 + b_i x + c_i)^j} \qquad (2)$$

où les A_j, $B_j^{(i)}$, $\alpha_j^{(i)}$ et $\beta_j^{(i)}$ sont des scalaires. On appelle communément (2) une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $R(x)$.

:) une telle décomposition nous permet maintenant de calculer la primitive de la fraction rationnelle $R(x)$

Pour ce faire, on calcule séparément les primitives des 3 différents termes du membre de droite de la décomposition (2).

i) Primitive de x^j : ces termes s'intègrent très facilement, et on a

(7₂)

$$\int^x dx'\, x'^j = \frac{1}{j+1}\, x^{j+1}$$

ii) Primitive de $1/(x-\rho)^j$: ici encore, on trouve facilement les primitives et on a

$$\int^x dx' \frac{1}{(x'-\rho)^j} = \begin{cases} \ln|x-\rho| & , \text{ si } j=1 \\ -\frac{1}{j-1}\frac{1}{(x-\rho)^{j-1}} & , \text{ si } j>1 \end{cases}$$

iii) Primitive de $(\alpha x+\beta)/(ax^2+bx+c)^j$: ces termes peuvent encore s'intégrer, mais de manière moins immédiate. Introduisons la notation

$$f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^j}$$

on veut donc calculer la primitive

$$F(x) = \int^x dx'\, f(x')$$

la première étape est de faire apparaître, au numérateur de $f(x)$, la dérivée du trinôme ax^2+bx+c. En notant que

$$\alpha x+\beta = \frac{\alpha}{2a}(2ax+b) + \beta - \frac{\alpha b}{2a}$$

on peut alors réécrire sous la forme

$$(3) \qquad f(x) = \frac{\alpha}{2a} \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^j} + \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a}\right) \frac{1}{(ax^2+bx+c)^j}$$

le premier terme du membre de droite de (3) peut maintenant s'intégrer, et on a donc

$$(4) \quad F(x) = \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a}\right) \int^x \frac{dx'}{(ax'^2+bx'+c)^j} + \begin{cases} \frac{\alpha}{2a} \ln |ax^2+bx+c| \,, & \text{si } j=1 \\ -\frac{\alpha}{2a} \frac{1}{j-1} \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{j-1}} \,, & \text{si } j>1 \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à calculer le premier terme du membre de droite de (4). Pour cela, on écrit d'abord $ax'^2+bx'+c$ sous forme canonique, ie

$$ax'^2+bx'+c = a\left[\left(x'+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

<u>NB</u> : on rappelle que, par construction, le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du polynôme $ax'^2+bx'+c$ est négatif. On a donc

$$\frac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$$

On effectue maintenant le changement de variable $x' \to y$ avec y tel que

$$x' + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\; y$$

et on obtient alors

$$(5) \quad \int^{x} \frac{dx'}{(ax'^2+bx'+c)^j} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a^{j+1}} \left(\frac{4a^2}{4ac-b^2}\right)^j \int^{\gamma(x)} dy \, \frac{1}{(y^2+1)^j}$$

où

$$\gamma(x) \equiv \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \qquad (6)$$

Enfin, la primitive restante dans le membre de droite de (5), ie

$$\int^{\gamma(x)} \frac{dy}{(y^2+1)^j}$$

peut s'obtenir grâce à l'exo 6, puisque l'on reconnaît la primitive $F_{j,2}(\gamma(x))$.

CCL : on est donc capable de calculer les primitives de chacun des termes de la décomposition (2) de la fraction rationnelle $R(x)$. Ainsi, à condition de connaître la factorisation (1) du polynôme $Q(x)$, il est possible de calculer la primitive de n'importe quelle fraction rationnelle $R(x) = P(x)/Q(x)$.

Intérêt des fractions rationnelles : il est fréquent qu'un calcul d'intégrale soit équivalent (après un ou plusieurs changements de variable (CV)) au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle, comme discuté à la question 2) ci-dessous.

2) Considérons tout d'abord une fraction rationnelle $R(\cos x, \sin x, \tan x)$, faisant donc intervenir les fonctions trigonométriques $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$. Effectuons maintenant le changement de variable (CV) $x \to t$ avec

$$t = \tan \frac{x}{2} \qquad ; \qquad dx = 2 \frac{dt}{t^2+1}$$

On utilise maintenant l'identité comme

$$t = \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

afin de démontrer les identités suivantes :

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}}$$

Ainsi, le CV $t = \tan \frac{x}{2}$ permet d'écrire les fonctions trigonométriques $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ comme des fractions rationnelles en t. On a donc

$$\int dx\, R(\cos x, \sin x, \tan x) = \int dt\, \tilde{R}(t)$$

où $\tilde{R}(t)$ est elle-même une fraction rationnelle, dont la primitive peut se calculer avec la méthode discutée à la question 1) ci-dessus.

Suivant la même logique, considérons maintenant une fraction rationnelle $R(e^x, \mathrm{ch}\, x, \mathrm{sh}\, x, \mathrm{th}\, x)$, faisant donc intervenir l'exponentielle e^x et les fonctions hyperboliques.

Effectuons maintenant le CV $x \to t$ avec

$$t = e^{x} \qquad ; \qquad dx = \frac{dt}{t}$$

En se rappelant de la définition des fonctions hyperboliques en termes de l'exponentielle, il est alors clair que l'on a

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{t^2+1}{2t} \quad ; \quad \operatorname{sh} x = \frac{t^2-1}{2t} \quad ; \quad \operatorname{th} x = \frac{t^2-1}{t^2+1}}$$

Ici, le CV $t = e^{x}$ permet encore d'écrire les fonctions hyperboliques $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ comme des fractions rationnelles en t. On a donc ici encore

$$\int dx\, R(e^{x}, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \operatorname{th} x) = \int dt\, \tilde{R}(t)$$

avec $\tilde{R}(t)$ une fraction rationnelle.

<u>NB</u> : en ce qui concerne l'intégration d'une fraction rationnelle $R(\cos x, \sin x, \tan x)$, le changement de variable $t = \tan x/2$ peut mener à des calculs assez lourds. Dans certains cas particuliers, il est possible de simplifier les calculs avec un CV différent, ce dernier étant donné par les <u>règles de Bioche</u> :

i) si $R(\cos x, \sin x)\, dx$ est invariant sous la transformation $x \mapsto -x$, ie si

$$R(\cos(-x), \sin(-x))\, d(-x) = R(\cos x, \sin x)\, dx$$

alors le CV adapté est $t = \cos x$;

ii) si $R(\cos x, \sin x)\,dx$ est invariant sous la transformation $x \mapsto \pi - x$, alors le CV adapté est $t = \sin x$;

iii) si $R(\cos x, \sin x)\,dx$ est invariant sous la transformation $x \mapsto \pi + x$, alors le CV adapté est $t = \tan x$.

3) i) Appliquons les méthodes discutées ci-dessus au calcul d'une primitive $F(x)$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1 + \cos x/3}{\sin x/2}$$

ie

$$F(x) = \int^x dx'\, f(x') = \int^x dx' \frac{1 + \cos x'/3}{\sin x'/2} \tag{7}$$

Commençons par le CV $x' \to \theta$ avec

$$\theta = \frac{x'}{6} \quad ; \quad dx' = 6\,d\theta$$

on obtient donc

$$F(x) = 6 \int^{x/6} d\theta \frac{1 + \cos 2\theta}{\sin 3\theta} \tag{8}$$

On linéarise $\cos 2\theta$ et $\sin 3\theta$, et on a

$$\begin{cases} 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta \\ \sin 3\theta = \sin\theta\,(4\cos^2\theta - 1) \end{cases}$$

On peut alors réécrire (8) sous la forme

$$F(x) = 6 \int^{\pi/6} d\theta \; g(\theta) \tag{9}$$

7_5

où la fonction $g(\theta)$ est donnée par

$$g(\theta) = \frac{2\cos^2\theta \sin\theta}{(1-\cos^2\theta)(4\cos^2\theta - 1)} \tag{10}$$

Notons que

$$g(-\theta)\, d(-\theta) = \frac{2\cos^2\theta\,(-\sin\theta)}{(1-\cos^2\theta)(4\cos^2\theta-1)} \quad (-d\theta)$$

$$= \frac{2\cos^2\theta \sin\theta}{(1-\cos^2\theta)(4\cos^2\theta-1)} \, d\theta \quad = g(\theta)\, d\theta$$

Ainsi, le CV adapté à ce stade est

$$u = \cos\theta \quad ; \quad du = -d\theta \sin\theta$$

et on obtient donc pour $F(x)$

$$F(x) = 3 \int^{\cos \pi/6} du \, \frac{u^2}{(u^2-1)(u^2-\frac{1}{4})} \tag{11}$$

On décompose maintenant l'intégrand en éléments simples,

$$\frac{u^2}{(u^2-1)(u^2-\frac{1}{4})} = \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{u+1} + \frac{2}{u-1} + \frac{1}{u+\frac{1}{2}} - \frac{1}{u-\frac{1}{2}} \right] \tag{12}$$

Finalement, on combine (11) et (12) pour obtenir

$$F(x) = -2\ln\left|\cos\frac{\pi}{6}+1\right| + 2\ln\left|\cos\frac{\pi}{6}-1\right| + \ln\left|\cos\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right|$$

ii) Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(2 - \operatorname{ch} x)^2}$$

On veut calculer une primitive

$$F(x) = \int^x dx' \, f(x') = \int^x dx' \frac{1}{(2 - \operatorname{ch} x')^2}$$

Effectuons donc le CV

$$u = e^{x'} \qquad ; \qquad dx' = \frac{du}{u}$$

On obtient alors pour $F(x)$

$$F(x) = 4 \int^{e^x} du \frac{u}{(u^2 - 4u + 1)^2} \tag{13}$$

Notons que l'on a

$$u^2 - 4u + 1 = (u - 2 - \sqrt{3})(u - 2 + \sqrt{3})$$

de sorte que (13) devienne

$$F(x) = 4 \int^{e^x} du \frac{u}{(u - 2 - \sqrt{3})^2 (u - 2 + \sqrt{3})^2} \tag{14}$$

On décompose maintenant en éléments simples, etc ...